

2.2.7 Krácení a rozšiřování zlomků

Předpoklady: 010217

Zlomky $\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \frac{4}{8}; \frac{5}{10}; \frac{6}{12}; \frac{7}{14}$ představují stejné číslo. Říkáme:

- zlomky $\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \frac{4}{8}; \frac{5}{10}; \frac{6}{12}; \frac{7}{14}$ mají stejnou hodnotu,
- zlomky $\frac{1}{2}; \frac{2}{4}; \frac{3}{6}; \frac{4}{8}; \frac{5}{10}; \frac{6}{12}; \frac{7}{14}$ se rovnají.

Proč je hodnota zlomků $\frac{1}{2}$ a $\frac{2}{4}$ stejná? Jak se zlomek $\frac{1}{2}$ změnil na $\frac{2}{4}$?

Jmenovatel jsme vynásobili dvakrát (čímž se velikost dílů dvakrát zmenšila), čítec jsme vynásobili dvakrát (čímž se počet dílů dvakrát zvětšil) $\Rightarrow$ hodnota zlomku se nezměnila.

Vlastně jsme polovinu papíru (zlomek $\frac{1}{2}$) rozstříhli na dva stejné čtvrtinové kousky (zlomek $\frac{2}{4}$). Množství papíru se nezměnilo, pouze ho máme ve větším počtu menších kousků.

Př. 1: Popiš podobným způsobem přeměnu zlomku $\frac{1}{3}$ na zlomek $\frac{3}{9}$.

Máme třetinu papíru, který rozstříhneme na tři stejné devítinové kousky.

Pokud vynásobíme čítec i jmenovatel zlomku stejným číslem, říkáme, že jsme zlomek rozšířili. Jeho hodnota se tím nezmění.

Například při rozšiřování zlomku $\frac{3}{5}$ dvěma postupujeme takto: $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$.

Př. 2: Rozšiř zlomek číslem v závorce.

a) $\frac{1}{4}$ {5}

b) $\frac{2}{3}$ {4}

c) $\frac{3}{5}$ {2}

d) $\frac{2}{7}$ {6}

e) $\frac{3}{2}$ {2}

f) $\frac{5}{21}$ {4}

g) $\frac{11}{20}$ {10}

h) $\frac{4}{6}$ {12}

a) $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{5}{20}$

b) $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$

c) $\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{6}{10}$

d) $\frac{2}{7} = \frac{2 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{12}{42}$

e) $\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4}$

f) $\frac{5}{21} = \frac{5 \cdot 4}{21 \cdot 4} = \frac{20}{84}$

g) $\frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 10}{20 \cdot 10} = \frac{110}{200}$

h) $\frac{4}{6} = \frac{4 \cdot 12}{6 \cdot 12} = \frac{48}{72}$

Pedagogická poznámka: Žáci mají tendenci psát pouze rozšířené zlomky. Trvám na tom, aby psali i původní zlomek a u první řádky i proces rozšíření.

Pedagogická poznámka: Následující řádky jsou záznamem diskuse, ke které asi určitě dojde (tento způsob zápisu použilo několik žáků).

Proč není možné rozšíření zlomku zapsat takto: $\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{12}$?

Zápis $\frac{2}{3} \cdot 4$ znamená: mám čtyři hromádky, na každé dvě třetiny. Kolik mám na všech čtyřech hromádkách? $\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3}$, což je něco jiného (stejně jako u správného rozšíření máme osm kousků, ale původní třetinové velikosti, máme tedy víc než na začátku).

Správný zápis rozšíření můžeme roztrhnout: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$. Jaký je význam zlomku $\frac{4}{4}$?

Platí: $\frac{4}{4} = 1$, což je jediná správná možnost, protože už dávno víme, že po vynásobení jedničkou budeme mít to samé.

Př. 3: Obrácený postup k rozšiřování se nazývá krácení. Zkrat' zlomek $\frac{18}{24}$. Popiš slovně svůj postup (analogicky tučnému textu). Kolik existuje výsledků?

$$\frac{18}{24} = \frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4} \quad \frac{18}{24} = \frac{18:2}{24:2} = \frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4} \quad \frac{18}{24} = \frac{18:3}{24:3} = \frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$$

Pokud krátíme "dokud to jde" dojdeme vždy ke stejnému výsledku (jasné, protože při žádném kroku se hodnota zlomku nezmění).

Pokud vydělíme čísel i jmenovatel zlomku stejným číslem, říkáme, že jsme zlomek zkrátili. Jeho hodnota se tím nezmění.

Pedagogická poznámka: V hodině získáte tři druhy výsledků: $\frac{18}{24} = \frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4}$,

$$\frac{18}{24} = \frac{18:2}{24:2} = \frac{9}{12} \text{ a } \frac{18}{24} = \frac{18:3}{24:3} = \frac{6}{8}.$$

Poměrně přímočarou diskusí dojde třída k závěru, že druhé dva postupy nejsou dodělané a že všemi dodělanými postupy dojdeme ke stejnému tvaru, který obsahuje dvě čísla, které nemají společného dělitele (návrhy, že se základní tvar pozná tím, že obsahuje pouze prvočísla (nebo alespoň jedno prvočíslo) se dají vyvrátit například zlomkem $\frac{4}{9}$, u kterého všichni rychle poznají, že krátit nejde).

Při krácení můžeme postupovat různými způsoby, po vykrácení všech možných čísel získáme vždy stejný výsledek – zlomek v základním tvaru (zlomek, který je zapsaný čísly, které nemají žádného společného dělitele).

I krácení se většinou zapisuje pomocí násobení, podobně jako rozšiřování:

$$\frac{18}{24} = \frac{3 \cdot \cancel{6}}{4 \cdot \cancel{6}} = \frac{3}{4}$$

Dodatek: Krácení bychom mohli zapisovat i pomocí dělení takto: $\frac{18}{24} = \frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4}$, tento postup není příliš výhodný, protože při něm musíme dvakrát dělit (poprvé, když hledáme dělitele, podruhé, když píšeme výsledek za druhým znakem rovná se) a zejména protože zápis z násobením nám ulehčí krácení při násobení zlomků.

Pokud jmenovatel i čítec zlomku vynásobíme (vydělíme) stejným číslem (různým od nuly) jeho hodnota se nezmění.

Př. 4: Zkrat' zlomky.

a) $\frac{4}{6}$

b) $\frac{12}{15}$

c) $\frac{14}{21}$

d) $\frac{32}{36}$

e) $\frac{16}{48}$

f) $\frac{48}{60}$

g) $\frac{66}{99}$

h) $\frac{36}{48}$

i) $\frac{25}{30}$

j) $\frac{64}{96}$

a) $\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{12}{15} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{4}{5}$

c) $\frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3}$

d) $\frac{32}{36} = \frac{8 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{8}{9}$

e) $\frac{16}{48} = \frac{4 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{4}{12} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3}$

f) $\frac{48}{60} = \frac{12 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{12}{15} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{4}{5}$

g) $\frac{66}{99} = \frac{2 \cdot 11}{3 \cdot 11} = \frac{2}{3}$

h) $\frac{36}{48} = \frac{6 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3}{4}$

i) $\frac{25}{30} = \frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 6} = \frac{5}{6}$

j) $\frac{64}{96} = \frac{4 \cdot 16}{4 \cdot 24} = \frac{16}{24} = \frac{8 \cdot 2}{8 \cdot 3} = \frac{2}{3}$

Pedagogická poznámka: Rozklad větších čísel (body h), i), j), některé body v dalším příkladu) je samozřejmě možné provádět dělením na straně.

Pedagogická poznámka: Snažím se donutit žáky, aby krácení zapisovali pomocí násobení. Pokud si to takto zvyknou už tady, je pro ně daleko snazší krátit při násobení zlomků.

Pedagogická poznámka: Žáci se ptají, jaký je rozdíl mezi příklady 4 a 5. V podstatě žádný, jen je u každého pokyn napsán jinými slovy. Příklad 4 navíc počítám v lehkém závěsu za třídou na tabuli (kvůli kontrole, ale hlavně kvůli usazení grafické podoby zápisu do sešitu).

Pedagogická poznámka: Někteří žáci se ptají, zda mají hledat největšího společného dělitele, nebo krátit postupně. Nepřikazuji, ale doporučuji postupné krácení. Stejně tak nevynucuji od následujícího příkladu zápis mezikroku.

Pedagogická poznámka: Zajímavý je bod g), kde se často nedaří najít společného dělitele 11. Doporučuji, že se vyplatí rozložit si (alespoň v hlavě) čítec na $2 \cdot 11$, i když je

na první pohled vidět, že společným dělitelem dvojka nebude (rozklad odhalil druhého dělitele).

Pedagogická poznámka: Následující příklad utneme tak, aby na příklad 6 zbylo alespoň pět minut. Nedopočítané body zůstávají žákům jako domácí úkol.

Př. 5: Převeď zlomek na základní tvar.

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } \frac{12}{16} & \text{b) } \frac{18}{24} & \text{c) } \frac{28}{56} & \text{d) } \frac{27}{30} & \text{e) } \frac{26}{36} & \text{f) } \frac{42}{52} \\ \text{g) } \frac{56}{88} & \text{h) } \frac{72}{84} & \text{i) } \frac{70}{105} & \text{j) } \frac{152}{184} & \text{k) } \frac{144}{240} & \text{l) } \frac{198}{242} \end{array}$$

$$\text{a) } \frac{12}{16} = \frac{4 \cdot 3}{4 \cdot 4} = \frac{3}{4} \quad \text{b) } \frac{18}{24} = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 4} = \frac{3}{4} \quad \text{c) } \frac{28}{56} = \frac{4 \cdot 7}{4 \cdot 14} = \frac{7}{14} = \frac{7 \cdot 1}{7 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d) } \frac{27}{30} = \frac{3 \cdot 9}{3 \cdot 10} = \frac{9}{10} \quad \text{e) } \frac{26}{36} = \frac{2 \cdot 13}{2 \cdot 18} = \frac{13}{18} \quad \text{f) } \frac{42}{52} = \frac{2 \cdot 21}{2 \cdot 26} = \frac{21}{26}$$

$$\text{g) } \frac{56}{88} = \frac{4 \cdot 14}{4 \cdot 22} = \frac{14}{22} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 11} = \frac{7}{11} \quad \text{h) } \frac{72}{84} = \frac{4 \cdot 18}{4 \cdot 21} = \frac{18}{21} = \frac{3 \cdot 6}{3 \cdot 7} = \frac{6}{7}$$

$$\text{i) } \frac{70}{105} = \frac{5 \cdot 14}{5 \cdot 21} = \frac{14}{21} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} = \frac{2}{3} \quad \text{j) } \frac{152}{184} = \frac{4 \cdot 38}{4 \cdot 46} = \frac{38}{46} = \frac{2 \cdot 19}{2 \cdot 23} = \frac{19}{23}$$

$$\text{k) } \frac{144}{240} = \frac{36}{60} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \quad \text{l) } \frac{198}{242} = \frac{99}{121} = \frac{9}{11}$$

Př. 6: Zkontroluj následující rovnosti. Pokud najdeš chybu, oprav ji.

$$\text{a) } \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \text{b) } \frac{12}{18} = \frac{1}{2} \quad \text{c) } \frac{36}{48} = \frac{6}{8} \quad \text{d) } \frac{12}{30} = \frac{16}{42}$$

Zkusíme rozšířit nebo zkrátit jeden ze zlomků tak, aby se jeho jmenovatel nebo číselník rovnal druhému zlomku.

$$\text{a) } \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \quad \frac{8}{12} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{rovnost platí.}$$

$$\text{b) } \frac{12}{18} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 9}{2 \cdot 9} = \frac{9}{18} \Rightarrow \text{rovnost neplatí.}$$

$$\text{c) } \frac{36}{48} = \frac{6}{8} \quad \frac{6}{8} = \frac{6 \cdot 6}{6 \cdot 8} = \frac{36}{48} \Rightarrow \text{rovnost platí.}$$

$$\text{d) } \frac{12}{30} = \frac{16}{42} \quad \frac{12}{30} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad \frac{16}{42} = \frac{8}{21} \Rightarrow \text{rovnost neplatí.}$$

Shrnutí: Pokud jmenovatel i číselník zlomku vynásobíme (vydělíme) stejným číslem (různým od nuly), jeho hodnota se nezmění.